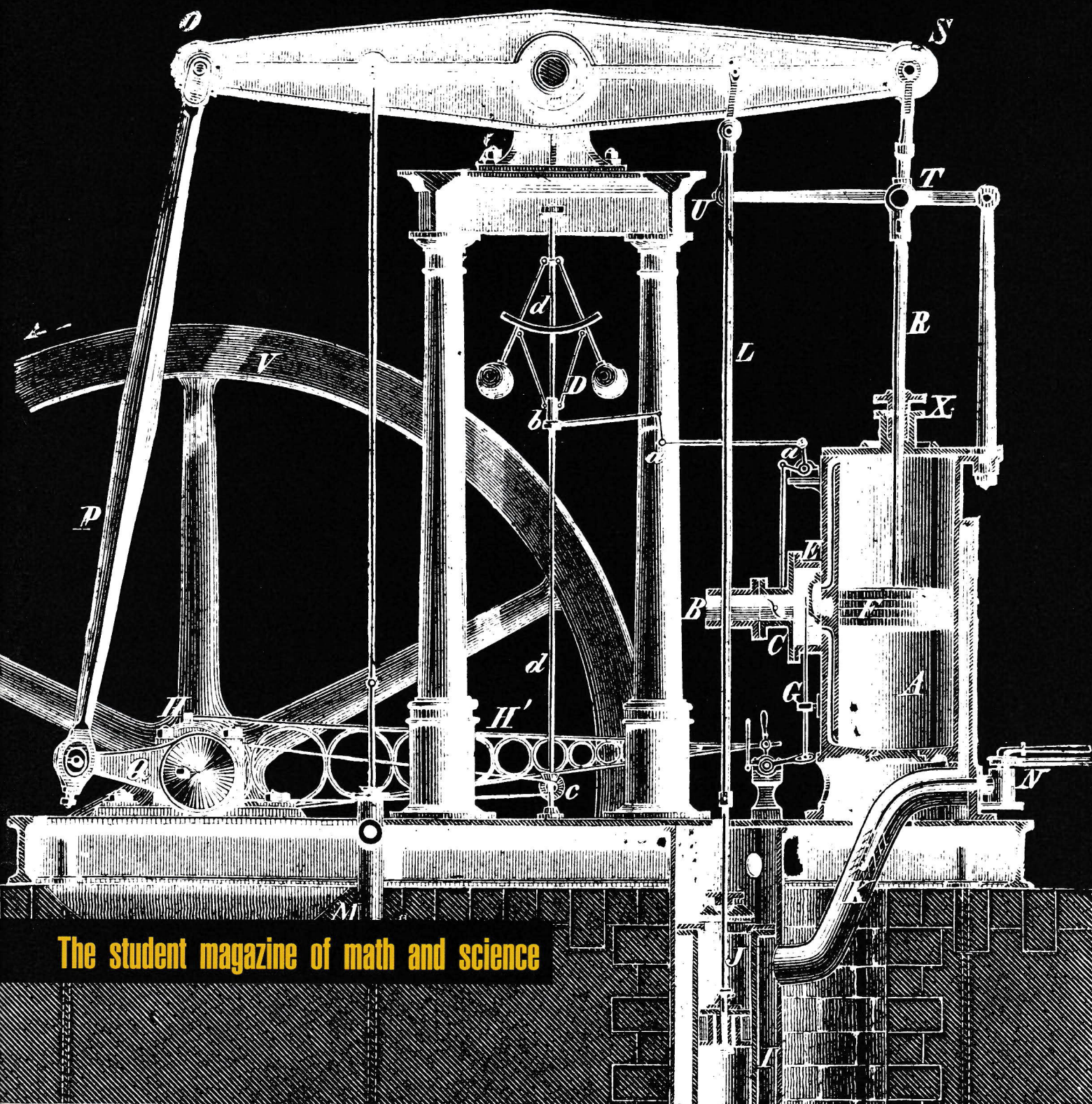


QUANTUM

NOVEMBER/DECEMBER 1990

\$5.00

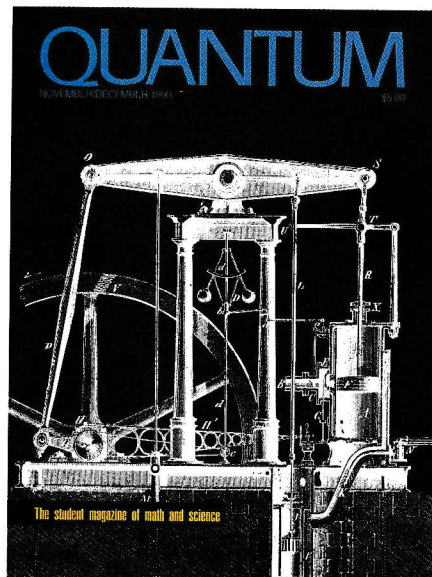


The student magazine of math and science

QUANTUM

NOVEMBER/DECEMBER 1990

VOLUME 1, NUMBER 2



FEATURES

4 Cutting-Edge Physics **Tomahawk throwing made easy**

by V. A. Davydov

8 Math to the Max **Going to extremes**

by A. L. Rosenthal

12 Front-Line Physics **Lightning in a crystal**

by Yury R. Nosov

20 Math to the Min **Making the crooked straight**

by Yury Solovyov

For the Scottish engineer and instrument maker James Watt, the 1780s were a very productive decade. Fifteen years earlier, while working on a Newcomen steam engine, he greatly improved its efficiency by adding a separate condenser chamber. But in 1781 a business partner urged him to invent a rotary steam engine for use in corn, malt, and cotton mills, and Watt went to work. In that year he devised the sun-and-planet gear, which allowed a shaft to produce two revolutions for each stroke of the engine. In 1782 he patented the double-acting engine, in which the piston pulled as well as pushed. This engine required a new method of rigidly connecting the piston, engaged in linear motion, to another part, engaged in rotary motion. So in 1784 he came up with the required linearizing device. Watt considered this "one of the most ingenious, simple pieces of mechanism I have contrived," and it's the subject of "Making the Crooked Straight" on page 20. In 1788 he added a centrifugal governor to automatically control the speed of the engine, and with his invention of the pressure gauge in 1790, the Watt engine was all but ready to make its dramatic contribution to the Industrial Revolution.

For a look at a cleaner, quieter device at the forefront of modern technology, turn to "Lightning in a Crystal" on page 12.

DEPARTMENTS

2 Publisher's Page

7 Brainteasers

17 Quantum Smiles

Physics for fools

24 How Do You Figure?

26 Getting to Know...

The natural logarithm

30 Mathematical Surprises

Play it again

32 Kaleidoscope

What's new in the solar system?

34 Contest

Shapes and sizes ...
Neutrinos and
supernovas

36 Looking Back

Genealogical threes

42 At the Blackboard

An incident on the train

46 In Your Head

Why are the cheese holes round?

51 Happenings

11th tournament of towns

... AHSME—AIME—
USAMO—IMO... Bulletin
Board

57 Solutions

64 Checkmate!

Rook versus knight

Making the crooked straight

Inversors and Watt's steam engine

by Yuri Solovyov

WHEN STEAM ENGINES AND steam pumps were invented, the theory of articulated mechanisms—systems of rigid links connected by hinges in such a way that the motion of one or more links is transformed into the motion of other links—began its rapid development. For almost a hundred years progress in this area was determined by the problem faced by the English mechanical engineer James Watt (1736–1819) in his attempts to improve his steam engine.

Watt's original design is schematically shown in figure 1. He put a piston inside a steam cylinder, where it could move back and forth. The piston was connected to a rod passing through the top cover of the cylinder. The rod was rigidly fastened to the piston and could, therefore, perform only linear motion. A rocker arm AF was attached to a hinge on top of the pillar OP , and the hinge F coupled the connecting rod FE with the rocker AF .

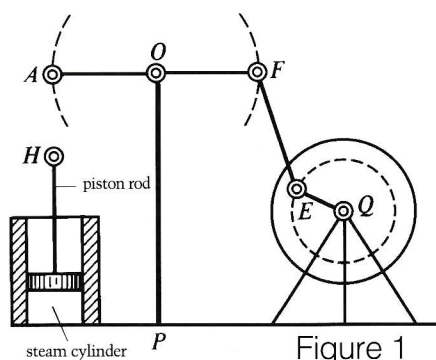


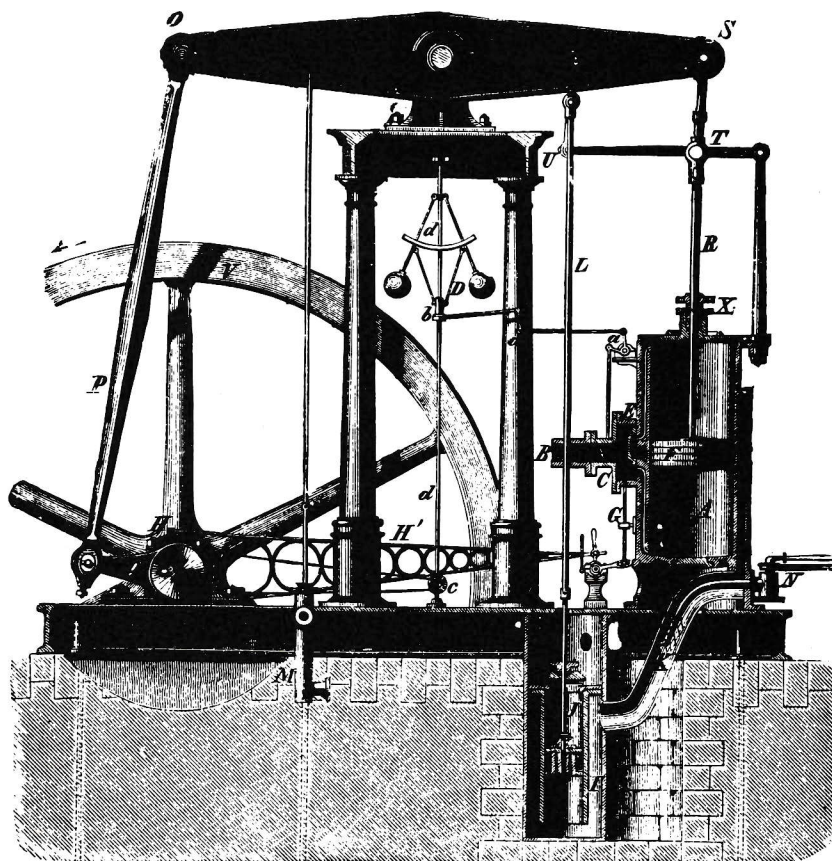
Figure 1

This connecting rod was, in turn, attached to the crankshaft QE by the hinge E . A flywheel was attached to the crankshaft.

If one could connect the head H of the piston rod to the rocker AF , the motion of the piston would be directly transformed into rotation of the flywheel. But point H is in linear motion whereas point E makes a circular arc with radius OA and center at point O . Consequently, it's impossible to connect points H and A rigidly without breaking the machine.

So this was Watt's problem: to develop a linearizing mechanism that would drive point H along a straight line and point A along an arc. Watt solved it by devising an articulated mechanism that drove point H along a curve having a small deviation from a straight line.

Many scientists subsequently developed linkages that drove point H with a smaller deviation, but it wasn't until the 1860s that a technique for driving point H exactly along a straight line was discovered.



Watt's simple linearizing mechanism

Here is Watt's reasoning. Consider two rockers AO and BO' rotating around fixed centers O and O' . If the ends A and B of the rockers AO and BO' are hinged to a segment AB , which Watt called a "shackle," a point of the shackle undergoes a motion very close to linear (fig. 2). In order to

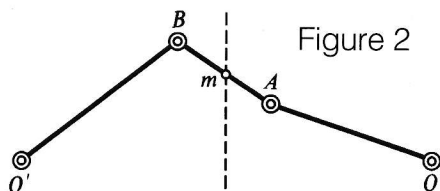


Figure 2

define the most suitable position of the fixed center O' and the length of the rocker BO' , consider three positions of the rocker OA (fig. 3): the middle OA and the two extremes OA' and OA'' . There should be a point m

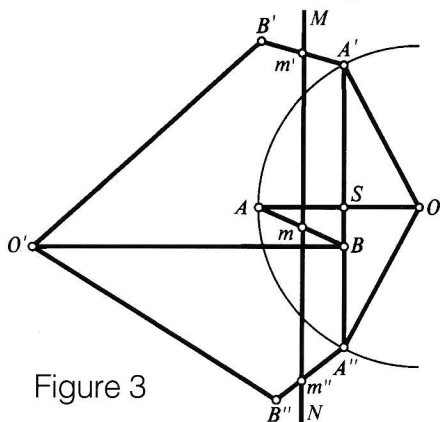


Figure 3

of the shackle that stays on the same straight line MN in all three positions. Watt took as that line the perpendicular to the segment OA passing through the midpoint of the altitude SA of the circular segment $A'AA''$.

Take a shackle ab of fixed length and choose a point m on it (fig. 4). The arcs drawn from points A' , A , and A'' with radius am intersect the straight line MN at points m' , m , and m'' , yielding three positions of point m of the shackle (fig. 3). Plotting on the extensions of $A'm'$, Am , and $A''m''$ segments equal to mb , we get three

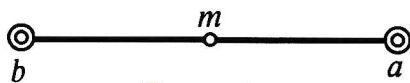


Figure 4

positions at the other end of the shackle denoted by B' , B , and B'' . These three points define a circumference passing through them. To find its center we drop perpendiculars to the centers of the segments $B'B$ and BB'' , which meet at point O' . The center O' defines the length of the second rocker $BO' = B'O' = B''O'$.

Connecting the end b of the shackle with end B of the rocker by a hinge ensures that at least in the middle and at the two extreme positions of the rocker OA the point m of the shackle stays on the straight line MN .

Watt hoped that, moving from m' to m'' , point m of the shackle would experience only a small deviation from a straight line. He was right: the trajectory is indeed quite close to a straight line, the precise trajectory being a sixth-order curve looking like an elongated figure eight (fig. 5).

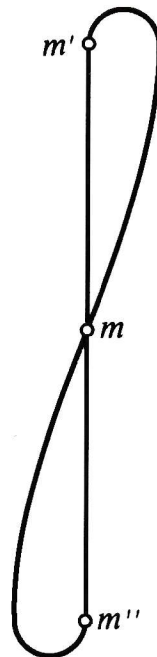


Figure 5

Watt's parallelogram

Watt had one more problem. In addition to the rod driving the piston of the steam cylinder, he had to provide a linear trajectory for another rod attached to the piston of a pump used to fill the condenser (fig. 6). Watt modified his mechanism so that it included two points, each of them moving approximately along a straight line.

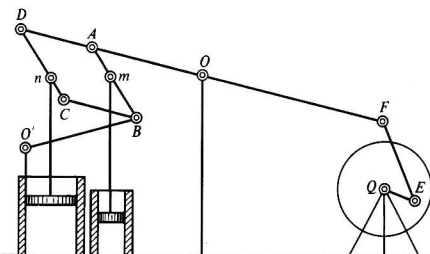


Figure 6

Extend the rod OA (fig. 7) and then complete the parallelogram $ABCD$. Plotting the straight line through points O and m , denote by n the intersection of this line and CD . Point n then

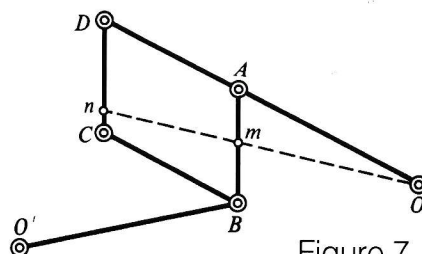


Figure 7

moves along a curve similar to that of point m and, consequently, also has a small deviation from a straight line. Since the steam cylinder is higher than the pump cylinder, Watt attached the head of the steam piston rod at point n , which has a greater amplitude, while the head of the pump's rod was attached at m .

Figure 6 is a schematic drawing of a steam engine with Watt's parallelogram as it appeared in 1784.

Watt himself considered the discovery of linearizing mechanisms his greatest scientific achievement (and not the governor now bearing his name, which is the cornerstone of automatic control theory).

Chebyshev's linearizing mechanism

A number of remarkable linearizing mechanisms were invented by P. Chebyshev, the outstanding Russian mathematician and mechanical engineer. He used his theory of functions with the least deviation from zero, developed in 1858. I won't go into the details of his theory here, but I'll describe one of the most practical Chebyshev mechanisms.

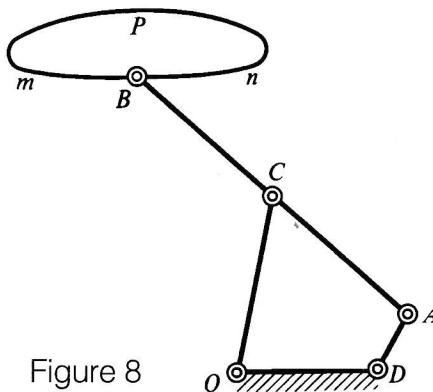


Figure 8

This mechanism (fig. 8) consists of a link AB with a hinge C at its center. The second link OC equal to $AB/2$ is attached to the hinge, so that $OC =$

$AC = BC$. The other end O of OC is attached to an immobile hinge O . Point A is attached to a third link DA attached to an immobile hinge D . If

$$OD = \frac{OC + CA + AD}{3}, \quad OC = AC = BC,$$

then point B of the Chebyshev mechanism describes a curve mpn , the portion mn of which has a very small deviation from a straight line. Chebyshev showed that the maximum deviation of the curve fragment mn from a line parallel to OD is given by the formula

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a) + \frac{(4a-r)^3 r}{12(2r+a)^2}} - \sqrt{\frac{4}{9}(r-a)(2r+a)} \right),$$

where $r = AB$, $a = 2AD$. It's a very small value indeed. For example, for $AC = OC = BC = 32$ inches (81.3 cm), $OD = 25$ inches (63.5 cm), $DA = 11$ inches (27.9 cm), we get $\delta = 0.032$ inch (0.081 cm).

Rigorous linearizing mechanisms

All the linearizing articulation mechanisms I've described so far are approximate: a straight line is approximated by a suitable curve. The theory of rigorous linearizing mechanisms is based on an important geometrical transformation called "inversion."

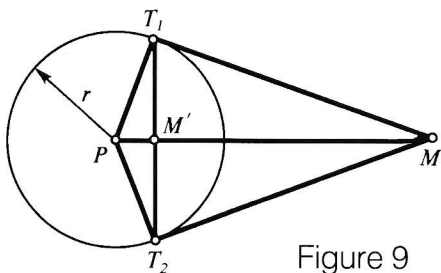


Figure 9

Consider a circle with center P and radius r (fig. 9). Take a point M lying, for example, outside the circle. Plot tangents MT_1 and MT_2 and find the point M' where chord T_1T_2 intersects the line PM . The right triangle PMT_1 yields

$$PM \cdot PM' = r^2. \quad (1)$$

Conversely, for each point M' lying inside the circle, we can easily find the corresponding outer point M .

Points M and M' lying on the same ray radiating from the center P of a circle of radius r are called *inverses* of

each other with respect to this circle if their distances from the center satisfy equation (1). It's obvious that the inverse of a point lying on the circumference coincides with the point and that there is no inverse of the center.

A transformation that produces an inverse M' for each point M is called an *inversion* with respect to the given circle. The circle itself is called the *circle of inversion*, and its center is said to be the *pole of inversion*. The square of its radius is the *degree of inversion*.

An inversion defines (the center P being the sole exception) a one-to-one transformation of the points of the plane. The relation between points and their inverses is a reciprocal one: if M' corresponds to M , then M corresponds to M' . Each point of the circle of inversion is a fixed point.

Let's take a look at one property of inversion that's very important for our purposes.

THEOREM 1. A straight line that does not contain the pole of inversion is mapped by inversion into the circle passing through the pole.

PROOF. Let A be the projection of the pole of inversion on the given line (fig. 10), B an arbitrary point of this line, A' and B' inverses of points A and B . By definition, $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$, or $PA:PB = PB':PA'$. This relation ensures that triangles PAB and $PB'A'$ are similar. Since angle PAB is a right one, angle $PB'A'$ is also right. So point B' lies on the circle with diameter PA' , which is what we set out to prove.

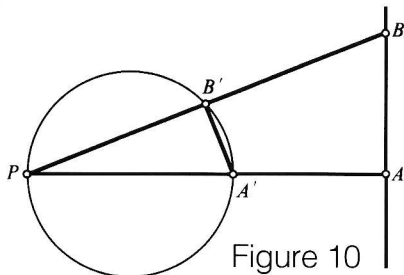


Figure 10

The reciprocal property of inversion immediately yields another assertion.

THEOREM 2. A circle passing through the pole of inversion is mapped by in-

version onto a straight line perpendicular to the line through the pole of inversion and the center of the circle.

So, if we could design a mechanism that applies inversion, rotational motion would be transformed precisely into linear motion. Mechanisms that make use of inversion are called "invertors."

Peaucellier's invertor

In 1864 the French engineer A. Peaucellier constructed the following invertor. Four links of the same length are connected by hinges to form a rhombus $ABCD$ (fig. 11). Two other links of equal length BO and DO , but longer than the sides of the rhombus, are attached to opposite vertices of the rhombus. Hinges are put at points B , O , and D .

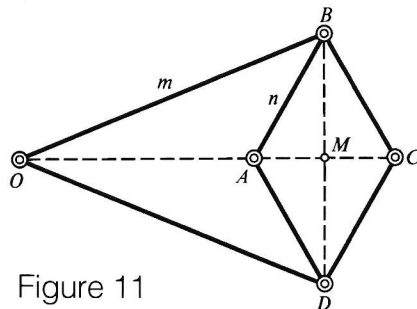


Figure 11

THEOREM 3. For any position of Peaucellier's invertor, the product of lengths AO and OC is a constant value.

PROOF. Denote the length of the long links by m , so that

$$OB = OD = m,$$

and the length of the short links by n , so that

$$AB = BC = CD = DA = n.$$

Now plot the diagonals of the rhombus. One of them will pass through point O (since the vertices of isosceles triangles DOB , DAB , and DCB with a common base BD belong to the same straight line). Let $OA = r$, $OC = p$. Considering the triangle OBM , we have

$$BM^2 = m^2 - OM^2. \quad (2)$$

The triangle BCM yields

$$BM^2 = n^2 - CM^2. \quad (3)$$

Subtracting (3) from (2), we get

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= OM^2 - CM^2 \\ &= (OM + CM)(OM - CM) \\ &= OC \cdot OA, \end{aligned}$$

or

$$\rho \cdot r = m^2 - n^2,$$

which means that the product

$$\rho \cdot r = OC \cdot OA$$

doesn't change when OC and OA vary, and our proof is done.

Consequently, if point O is fixed and point A moves along a curve, then point C follows the image of that curve under inversion. So if point A moves along a circle passing through the pole of inversion, point C moves along a straight line. (It turns out that Chebyshev's student Lipkin at St. Petersburg University devised this same invensor independently in 1872.)

Let's look at one more invensor before we leave the subject.

Hart's invensor

Soon after the appearance of Peaucellier's invensor an English mathematician and mechanical engineer named Hart constructed an invensor based on an antiparallelogram. A quadrilateral $ABCD$ is called an antiparallelogram (fig. 12) if its opposite sides are equal and two of them (sides AB and CD in fig. 12) intersect each other. The fact that a hinged antiparallelogram produces inversion stems from the following two theorems.

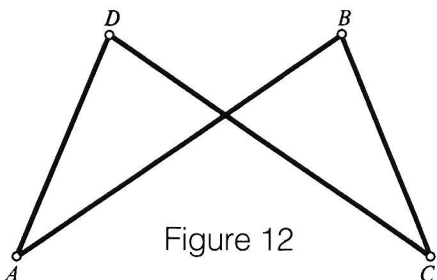


Figure 12

THEOREM 4. For any antiparallelogram the product of its diagonals DB and AC (fig. 13) is a constant value.

PROOF. We'll begin by denoting the relationships

$$AB = DC = m, \quad AD = BC = n.$$

Take a segment BL parallel to AD and draw a circular arc with center B and radius BL . This arc passes through point C since

$$BL = DA = BC.$$

Now draw the line AM tangent to this arc. Its square equals the product of the secant and its outer segment. Consequently,

$$AM^2 = AL \cdot AC = DB \cdot AC. \quad (4)$$

Considering the triangle ABM we have

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 - BM^2 \\ &= AB^2 - BC^2 \\ &= m^2 - n^2. \end{aligned}$$

Comparing this with (4), we get

$$DB \cdot AC = m^2 - n^2 = \text{constant},$$

as asserted.

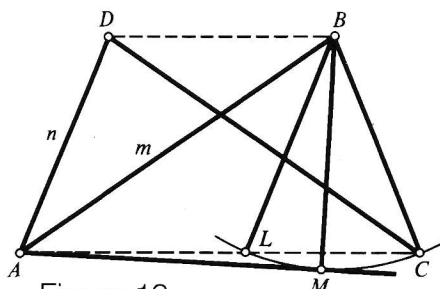


Figure 13

THEOREM 5. Choose any two equal sides of a hinged antiparallelogram and fix a point on a third side. Draw a straight line through this point parallel to the diagonals of the antiparallelogram. The product of the distances from the fixed point to the intersections of the line with the chosen sides remains the same for all positions of the antiparallelogram.

PROOF. In the notations of figure 14 the product in question is one of the following four: $MN \cdot NQ$, $MN \cdot NP$, $PQ \cdot PM$, $PQ \cdot QN$. All these products are evidently equal. It's therefore suf-

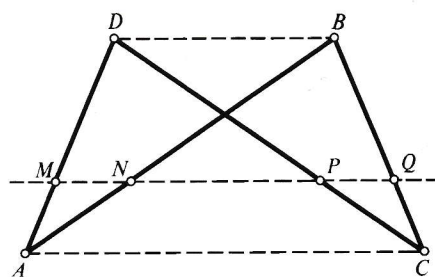


Figure 14

ficient to consider the product $MN \cdot NQ$, where the point N is fixed. The similarity of triangles AMN and ADB yields

$$MN = BD \cdot \frac{AN}{AB},$$

while the similarity of triangles ABC and NBQ implies

$$NQ = AC \cdot \frac{BN}{AB}.$$

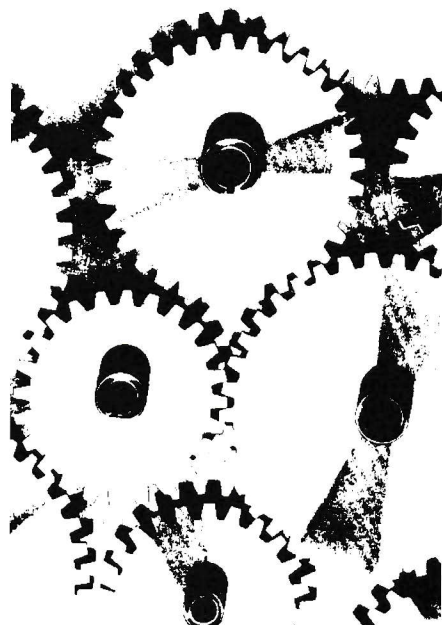
Multiplying these equalities we get

$$MN \cdot NQ = BD \cdot AC \cdot \frac{AN \cdot BN}{AB^2}.$$

The ratio $(AN \cdot BN)/AB^2$ is a constant since all its terms are constant values. The product $BD \cdot AC$ is a constant by theorem 4. Consequently,

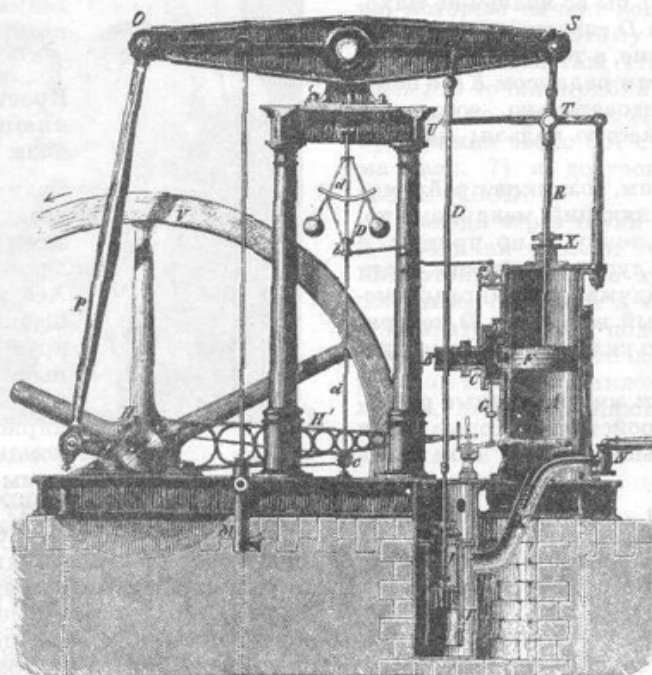
$$MN \cdot NQ = \text{constant}.$$

This is how Hart's invensor works. Taking any of the above four points as the pole of inversion, we move the second point along a circle passing through the first point. Then the third point traces a straight line. \blacksquare



ИНВЕРСОРЫ

Доктор физико-математических наук
Ю. СОЛОВЬЕВ



С изобретением паровой машины и паровых насосов начала бурно развиваться теория шарнирных механизмов — систем, составленных из твердых звеньев, соединенных между собой шарнирами и предназначенных для преобразования движения одного или нескольких звеньев в требуемые движения других звеньев. Около ста лет развитие теории шарнирных механизмов определялось стремлением наиболее удовлетворительным образом решить задачу, с которой столкнулся английский механик Джеймс Уатт при усовершенствовании паровой машины.

Уатт задумал устроить паровую машину следующим образом (рис. 1). В паровой цилиндр AB он поместил поршень, который двигался внутри цилиндра взад и вперед. От поршня шел поршневый шток CD , проходя-

щий сквозь крышку цилиндра. Так как поршневой шток составлял с цилиндром единое целое, то головка D поршневого штока совершала прямолинейное движение взад и вперед. На колонку HK при помощи шарнирного соединения K было насажено коромысло EF , с которым посредством шарнира F был соединен шатун FM ,

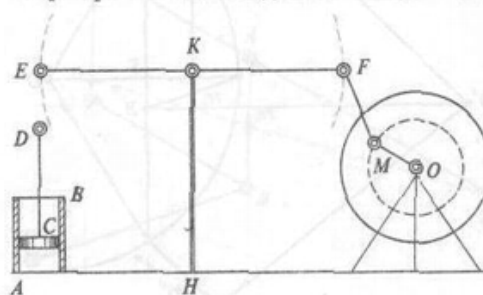


Рис. 1.

соединенный, в свою очередь, шарниром M с кривошипом OM . На кривошипе OM насаживался маховик.

Если бы можно было соединить головку D поршневого штока с коромыслом EF , то движение поршня преобразовывалось бы во вращение маховика. Но точка D совершает прямолинейное движение, а точка E описывает дугу окружности радиусом KE с центром в K . Следовательно, соединить точки D и E жестко нельзя: машина сломается.

Таким образом, возникла проблема: создать спрямляющий механизм, который вел бы точку D по прямой, а точку E — по дуге окружности. Уатт решил ее, придумав шарнирный механизм, который вел точку D по кривой, очень мало уклоняющейся от прямой.

Впоследствии многие ученые разрабатывали устройства, которые вели точку D с меньшим, чем в механизме

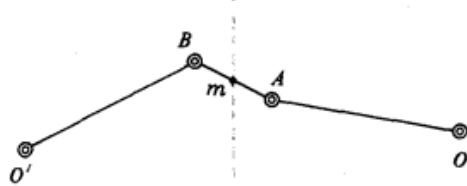


Рис. 2.

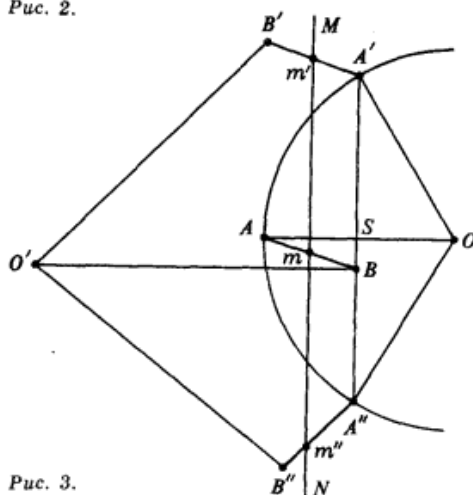


Рис. 3.

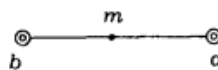


Рис. 4.



Рис. 5.

Уатта, уклонением от прямой, и лишь в 60-е годы XIX столетия был изобретен способ точного ведения точки D по прямой.

Простой спрямляющий механизм Уатта

Уатт рассуждал следующим образом. Рассмотрим два коромысла AO и BO' , вращающихся вокруг неподвижных центров O и O' . Если шарнирно соединить концы A и B коромысел AO и BO' отрезком AB — Уатт называл его серьгой, — то какая-нибудь точка серьги будет совершать движение, мало уклоняющееся от прямолинейного (рис. 2). Для определения наиболее подходящих для этой цели положения неподвижного центра O' и длины коромысла BO' рассмотрим три положения коромысла OA (рис. 3): среднее OA и два крайних OA' и OA'' и потребуем, чтобы при этих трех положениях коромысла точка m серьги находилась на некоторой прямой MN . За такую прямую Уатт принял перпендикуляр к среднему положению коромысла OA , проходящий через середину стрелки SA (стрелкой называется часть радиуса, перпендикулярного к хорде $A'A''$, заключенная между хордой и дугой).

Возьмем серьгу ab определенной длины и выберем на ней точку m (рис. 4). Описав радиусом am дуги из точек A' , A и A'' , получим три положения точки m серьги на пересечениях m' , m и m'' этих дуг с прямой MN (рис. 3). Продолжая прямые $A'm'$, Am и $A''m''$ и откладывая на их продолжениях отрезки, равные mb , мы получим три положения B' , B

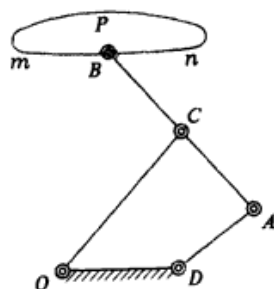


Рис. 8.

мой. Так как высота парового цилиндра больше высоты насосного цилиндра и вследствие этого ход поршневого штока парового цилиндра больше хода поршневого штока насосного цилиндра, Уатт укрепил головку парового штока в точке *п*, имеющей большую амплитуду, головка же насосного штока была укреплена в точке *т*.

Общий вид паровой машины с параллелограммом Уатта изображен на рисунке 6. В таком виде она появилась в 1784 году.

Сам Уатт считал своим высшим научным достижением изобретение спрямляющих механизмов, а отнюдь не регулятор, который носит теперь его имя и является краеугольным камнем теории автоматического управления.

Спрямляющий механизм Чебышева

Знаменитый русский математик и механик академик П. Чебышев изобрел несколько замечательных приближенных спрямляющих механизмов, кото-

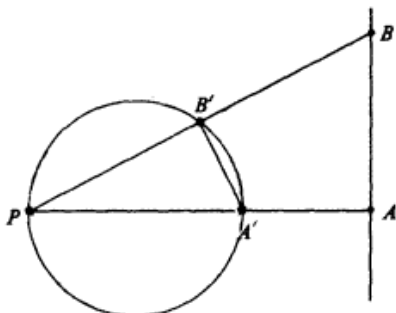


Рис. 9.

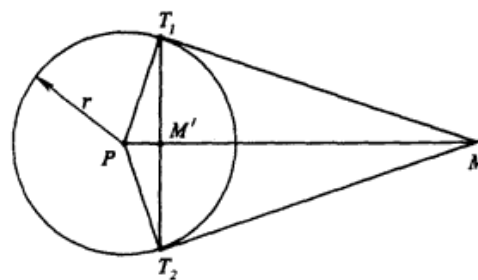


Рис. 10.

рые он нашел с помощью созданной им теории функций, наименее уклоняющихся от нуля (1858 год). Не имея возможности сколь-нибудь подробно изложить эту теорию, мы опишем только устройство одного из наиболее практических механизмов Чебышева.

Этот механизм (рис. 8) состоит из звена *AB*, в середине которого устроен шарнир *C*. На этот шарнир надето звено *OC*, равное $\frac{AB}{2}$, так что $OC=AC=BC$. Другой конец *O* звена *OC* укрепляется в неподвижном шарнире *O*. Точка *A* движется по дуге окружности с помощью третьего звена *DA*, укрепленного в неподвижном шарнире *D*. При выполнении следующих соотношений между размерами звеньев:

$$OD = \frac{OC + CA + AD}{3}, \quad OC = AC = BC$$

точка *B* механизма Чебышева описывает кривую *mPn*, часть которой *mn* очень мало отличается от прямой. Чебышев показал, что наибольшее отклонение δ отрезка кривой *mn* от прямолинейного направления, параллельного *OD*, вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{4}{9} (r-a)(2r+a) + \frac{(4a-r)^3 r}{12(2r+a)^2}} - \sqrt{\frac{4}{9} (r-a)(2r+a)} \right),$$

где $r=AB$, $a=2AD$. Это очень маленькая величина. Скажем, при $AC=OC=BC=32$ дюйма (81,3 см), $OD=25$ дюймов (63,5 см), $DA=11$ дюймов (27,9 см), $\delta=0,032$ дюйма (0,081 см).

Точные спрямляющие механизмы. Инверсия

Все описанные выше спрямляющие шарнирные механизмы были приближенными: прямая заменялась некоторой подходящей кривой. Теория точных спрямляющих механизмов основана на одном геометрическом преобразовании, имеющем большое значение в современной математике и физике — инверсии.

Пусть дана окружность с центром P и радиусом r (рис. 9). Возьмем какую-нибудь точку M , для определенности — внешнюю по отношению к этой окружности. Из точки M проведем к данной окружности касательные MT_1 и MT_2 и построим точку пересечения M' хорды T_1T_2 с прямой PM . Из прямоугольного треугольника PMT_1 находим

$$PM \cdot PM' = r^2. \quad (1)$$

Обратно, если дана точка M' , лежащая внутри окружности, то можно без труда построить внешнюю точку M .

Две точки M и M' , лежащие на одном луче, выходящем из центра P окружности радиусом r , называются взаимно обратными относительно этой окружности, если расстояния от них до центра удовлетворяют соотношению (1). Очевидно, что точка, обратная точке окружности, с ней совпадает и что центр окружности не имеет точки, ему обратной.

Соответствие между взаимно обратными точками или, иначе, преобразование, посредством которого из каждой точки M получается обратная ей точка M' , называется *инверсией* относительно данной окружности. Сама окружность называется *окружностью инверсии*, ее центр — *полюсом инверсии*, квадрат ее радиуса — *степенью инверсии*.

Из сказанного следует, что инверсия представляет собой взаимно однозначное (за исключением точки P) преобразование точек плоскости. Полюс инверсии обратной точки не имеет.

Соответствие между точками в инверсии взаимно: если точка M' соот-

ветствует точке M , то и точка M соответствует точке M' . Каждая точка окружности инверсии является неподвижной точкой.

Рассмотрим теперь важное для наших целей свойство инверсии.

Теорема 1. Прямой линии, не проходящей через полюс инверсии, соответствует окружность, проходящая через полюс инверсии.

Доказательство. Пусть A — проекция полюса инверсии на данную прямую (рис. 10), B — произвольная точка данной прямой, A' и B' — точки, обратные точкам A и B . Из определения инверсии следует, что $PA \cdot PA' = PB \cdot PB'$, или $PA : PB = PB' : PA'$. В силу этой пропорциональности треугольники PAB и $PB'A'$ подобны. Так как угол PAB — прямой, то и угол $PB'A'$ — прямой. Точка B' лежит на окружности, имеющей отрезок PA' своим диаметром, что и требовалось доказать.

В силу взаимности из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. Окружность, проходящая через полюс инверсии, преобразуется в прямую, перпендикулярную прямой, соединяющей полюс инверсии с центром данной окружности.

Следовательно, если бы нам удалось получить механизм, реализующий инверсию, то удалось бы преобразовывать движение по окружности в движение по прямой и обратно.

Механизмы, реализующие инверсию, называются *инверсорами*.

Инверсор Поселлье

В 1864 году французский инженер Поселлье сконструировал следующий

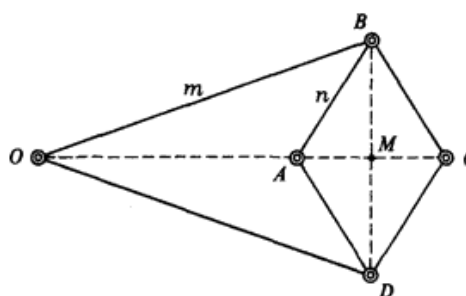


Рис. 11.

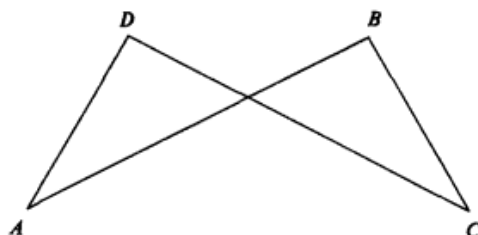


Рис. 12.

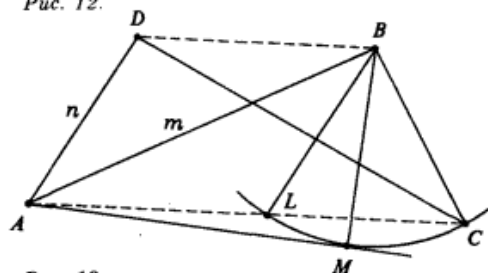


Рис. 13.

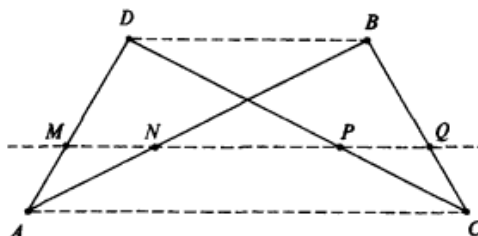


Рис. 14.

инверсор. Четыре равных между собой прямолинейных звена соединяются шарнирами в ромб $ABCD$ (рис. 11). От каких-либо двух противоположных вершин ромба проводятся два равных между собой звена BO и DO , причем каждое из них длиннее стороны ромба. В точках B , D и O помещаются шарниры. Получившийся механизм и есть инверсор Поселлье.

Теорема 3. При любом положении инверсора Поселлье произведение расстояний AO и OC есть величина постоянная.

Доказательство. Обозначим длину каждого из длинных звеньев инверсора через m , так что

$$OB = OD = m.$$

Обозначим длину каждого из коротких звеньев через n , так что

$$AB = BC = CD = DA = n.$$

Проведем диагонали ромба. Одна из них пройдет через точку O , поскольку вершины равнобедренных треугольников DOB , DAB и DCB , имеющих общее основание BD , лежат на одной прямой. Положим $OA = r$, $OC = \rho$. Из треугольника OBM имеем

$$BM^2 = m^2 - OM^2. \quad (2)$$

Из треугольника BCM

$$BM^2 = n^2 - CM^2. \quad (3)$$

Вычитая (3) из (2), получаем

$$\begin{aligned} m^2 - n^2 &= OM^2 - CM^2 = \\ &= (OM + CM)(OM - CM) = OC \cdot OA, \end{aligned}$$

или

$$\rho \cdot r = m^2 - n^2.$$

Итак, в инверсоре Поселлье произведение

$$\rho \cdot r = OC \cdot OA$$

остается постоянным при любых изменениях OC и OA , что и требовалось доказать.

Следовательно, если мы сделаем точку O такого инверсора неподвижной и будем двигать точку A по какой-либо кривой, то точка C опишет образ этой кривой при инверсии. В частности, если точка A движется по окружности, проходящей через полюс инверсии, то точка C будет двигаться по прямой. Отметим, что в 1872 году описанный выше инверсор независимо от Поселлье изобрел ученик Чебышева студент Петербургского университета Липкин.

Инверсор Гарта

Вскоре после появления инверсора Поселлье английский математик и механик Г. Гарт построил инверсор из антипараллелограмма. Антипараллелограммом называется четырехугольник $ABCD$ (рис. 12), в котором противоположные стороны равны и стороны AB и CD взаимно пересекаются. Тот факт, что шарнирный антипараллелограмм реализует инверсию, вытекает из следующих двух теорем.

Теорема 4. Произведение диагоналей DB и AC антипараллелограмма (рис. 13) есть величина постоянная.

Доказательство. Условимся о следующих обозначениях:

$$AB = DC = m, AD = BC = n.$$

Проведем отрезок BL , параллельный AD , и опишем из точки B радиусом BL дугу. Эта дуга пройдет через точку C , поскольку

$$BL = DA = BC.$$

Проведем из точки A касательную AM к этой дуге. Квадрат касательной AM равен произведению секущей на ее внешний отрезок. Следовательно,

$$AM^2 = AL \cdot AC = DB \cdot AC. \quad (4)$$

Из треугольника ABM имеем

$$AM^2 = AB^2 - BM^2 = AB^2 - BC^2 = m^2 - n^2.$$

Сравнивая это равенство с (4), получаем

$$DB \cdot AC = m^2 - n^2 = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Теорема 5. Любые три из четырех точек пересечения сторон антипараллелограмма прямой, параллельной его диагонали, образуют на этой прямой два отрезка, произведение которых при всех положениях антипараллелограмма остается постоянным.

Доказательство. Проведем какую-либо прямую, пересекающую все стороны антипараллелограмма и параллельную его диагонали (рис. 14).

Получим четыре точки пересечения M, N, P, Q его сторон с этой прямой. Из подобия треугольников AMN и ADB вытекает, что

$$MN = BD \cdot \frac{AM}{AD}.$$

Из подобия треугольников ABC и NBQ имеем

$$NQ = AC \cdot \frac{BQ}{BC}.$$

Перемножая почленно эти равенства, получим

$$MN \cdot NQ = BD \cdot AC \cdot \frac{AM}{AD} \cdot \frac{BQ}{BC}.$$

Но отношение $\frac{AM}{AD} \cdot \frac{BQ}{BC}$ постоянно, так как в него входят только постоянные величины. Произведение $BD \cdot AC$ постоянно согласно теореме 4. Следовательно,

$$MN \cdot NQ = \text{const}.$$

Точно таким же способом можно доказать, что

$$MP \cdot PQ = \text{const}.$$

Инверсор Гарта устроен следующим образом. Приняв какую-либо из этих четырех точек за центр инверсии, будем двигать вторую точку по окружности, проходящей через первую точку. Тогда третья точка вычертит прямую.

Письма о физике

(Начало см. на с. 2)

ском политехническом институте на инженерно-физическом факультете есть специальные группы, в которых готовят физиков-теоретиков. Выбор специальности происходит, как правило, на 3-м курсе, а первые два-два с половиной года будущие физики-экспериментаторы и физики-теоретики учатся вместе. Тех, кто рано (с первых месяцев учебы) сделал выбор, решив стать физиком-теоретиком, под-

стерегает опасность: считая, что главное для них математика, они «не замечают» общей физики — курса, вводящего студента в мир физики... Надо помнить: стать хорошим физиком-теоретиком можно только хорошо зная и понимая не только математику (без нее, конечно, нельзя обойтись!), но и физику, с изучением которой у многих школьников и студентов первых курсов возникают трудности. Я хотел написать «почему-то возникают трудности», но почувствовал в «почему-то» фальшь. Общая физика — труднейший предмет и для преподавания, и для усвоения.

М. Каганов

(Рисунки к статье заимствованы из книги «Физики шутят».)